# Числа, функции и графики

*Как читать формулу как последовательность действий и видеть её смысл на графике?*

Шесть ошибок могут означать хороший или плохой результат. Всё зависит от того, сколько было попыток. На этом примере начнём читать математические записи, которые дальше понадобятся для оценки и обучения моделей.

## 1. Выбрать целое для доли

Пусть программа дала сорок ответов и ошиблась в шести. Чтобы сравнить её с другой программой, недостаточно знать число ошибок: у второй могло быть совсем другое число вопросов. Разделим число ошибок на число всех ответов. Получится `6 / 40 = 0.15`. Это **доля** ошибок. Умножение на сто переводит её в проценты: 15 процентов.

Знаменатель говорит, какую группу мы считаем целым. Шесть ошибок из сорока ответов и шесть ошибок из десяти трудных ответов дают разные доли: 0,15 и 0,6. Обе могут описывать одну программу, но отвечают на разные вопросы. Прежде чем записать дробь, назовите группу словами.

Доля верных ответов равна `34 / 40 = 0.85`. Она также получается как единица минус доля ошибок, если каждый ответ либо верный, либо ошибочный. При наличии отдельной категории «не оценён» сначала нужно договориться, входит ли она в общее число.

Если доля ошибок уменьшилась с 20 до 15 процентов, разность равна пяти **процентным пунктам**. Относительное уменьшение составляет `5 / 20 = 0.25`, то есть 25 процентов от прежней доли. Эти две фразы описывают одно изменение в разных единицах. Всегда уточняйте, что именно сравниваете.

**Пример**

У двух классов разные размеры. В одном ошиблись двое из десяти, в другом четверо из сорока. Во втором ошибок больше по числу, но меньше по доле: 10 % против 20 %.

> Из 20 ответов ошибочны 6. Какой процент ответов ошибочен?

*Профи.* **Почему проценты не складываются**

Процент всегда считается от какой-то базы, поэтому изменение «на $p$ %» — это умножение на $1 + p/100$. Рост на 20 % даёт множитель 1,2, снижение на 20 % — множитель 0,8. Два изменения подряд перемножаются, а не складываются: $100 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}8 = 96$, а не 100. Чтобы после роста на 20 % вернуться к прежнему значению, убавить нужно не 20 %, а $1 - 1/1{,}2 \approx 16{,}7$ %.

Та же арифметика стоит за новостями о моделях. Точность выросла с 80 % до 90 %. Доля ошибок упала с 20 % до 10 %, то есть «вдвое» — относительно прежней ошибки, или на 10 процентных пунктов. Сама точность при этом выросла всего на 10/80 = 12,5 % от прежней. Три фразы описывают одно событие; выбор фразы — вопрос подачи, а не математики.

Чтобы поймать подмену, переведите проценты в штуки. На 1000 ответов было 200 ошибок, стало 100: разница в 100 ответов видна сразу, и никакой множитель её не замаскирует.

> Число было равно 100. Его увеличили на 11 %, а затем результат уменьшили на 11 %. Какое число получилось? Ответ с точностью до сотых.

## 2. Суммировать и усреднять

Чтобы объединить несколько величин, нужна сумма. Запись $\sum_{i=1}^{n} x_i$ означает: перебрать индексы от одного до $n$ включительно и сложить соответствующие значения. Нижний индекс у $x_i$ называет позицию величины, а не умножение. Для значений 2, 4 и 9 сумма равна 15.

Среднее получается делением суммы на число значений. В этом примере оно равно пяти. Если числа описывают минуты, среднее тоже измеряется в минутах; число наблюдений безразмерно. Такая проверка единиц помогает обнаружить ошибку в формуле.

Квадрат суммы и сумма квадратов различаются. Для 2 и 3 квадрат суммы равен $(2 + 3)^2 = 25$, а сумма квадратов равна $2^2 + 3^2 = 13$. В первом случае сначала складываем, во втором сначала возводим каждое значение в квадрат. Скобки и положение индекса задают действия, поэтому формулу полезно читать как программу.

Средние групп нельзя всегда усреднять поровну. Если в одной группе два результата со средним 10, а в другой восемь со средним 20, общая сумма равна 20 плюс 160. Среднее десяти результатов равно 18. Число 15 получилось бы при равном весе групп, хотя вторая содержит в четыре раза больше наблюдений.

> Числа равны 1, 3 и 5. Чему равна сумма их квадратов?

**{ƒ} Обозначения**

| Запись | Как прочитать |
|---|---|
| $x_i$ | значение под номером $i$ |
| $n$ | число значений |
| $\sum$ | сложить по указанным индексам |

*Эпик.* **Лучше в каждой группе — хуже в целом**

Правило «усреднять с весами, а не поровну» иногда даёт вывод, который противоречит интуиции. Две программы отвечали на вопросы двух типов.

| | **Лёгкие: ответов / ошибок** | **Трудные: ответов / ошибок** |
|---|---|---|
| Программа А | 10 / 1 | 90 / 27 |
| Программа Б | 90 / 18 | 10 / 4 |

На лёгких вопросах А ошибается в 10 % случаев, Б — в 20 %. На трудных А ошибается в 30 %, Б — в 40 %. В каждой группе А лучше. Но общая доля ошибок у А равна 28/100 = 0,28, а у Б — 22/100 = 0,22: в целом лучше Б.

Это **парадокс Симпсона**. Ошибки в вычислениях нет: общая доля — взвешенное среднее долей по группам, а веса у программ разные. А отвечала в основном на трудные вопросы, Б — на лёгкие.

Какой вывод верен? Оба, но на разные вопросы. «Какую программу взять для вопроса известного типа?» — А. «Какая программа ошибалась реже на том наборе, который ей достался?» — Б. Сравнивать общие доли честно только при одинаковом составе наборов; иначе сравнивают по группам или заранее договариваются о весах.

Та же схема встречается далеко от программ: в приёме в университеты, когда одна группа абитуриентов чаще подаёт заявки на конкурсные факультеты, и в медицине, когда тяжёлых пациентов направляют в лучшую клинику. Одна группа чаще оказывается в трудных условиях, и её общая доля неудач растёт, хотя внутри каждого условия она справляется лучше.

> Программа ошибается в 10 % лёгких вопросов и в 30 % трудных. В наборе из 100 вопросов лёгких 59, остальные трудные. Какой процент всех ответов ошибочен? Ответ с точностью до сотых.

> На лёгких вопросах программа А ошибается реже, чем Б, и на трудных тоже реже. Что из этого следует обязательно?
>
> - ○ Общая доля ошибок А меньше, чем у Б, если доля трудных вопросов в наборах обеих программ одинакова
> - ○ Общая доля ошибок А меньше, чем у Б, на любых наборах вопросов
> - ○ Общие доли ошибок сравнивать нельзя ни при каких условиях
> - ○ Общая доля ошибок А больше, чем у Б

### 3. Функция связывает вход и выход

Представьте тариф: один рубль за начало поездки и два рубля за каждый километр. Если расстояние обозначить $x$, стоимость задаётся правилом $f(x) = 2x + 1$. **Функция** каждому допустимому входу ставит в соответствие ровно один выход. При расстоянии три получаем семь; при расстоянии ноль получаем один.

Имя $f$ позволяет ссылаться на правило. Запись $f(3)$ просит подставить число три вместо входа, а не умножить букву на три. Обратный вопрос звучит иначе: какой вход даёт стоимость девять? Решаем `2x + 1 = 9`: вычитаем один, затем делим на два и получаем четыре.

Нужно также задать допустимые входы, или **область определения**. Для расстояния отрицательные числа не имеют смысла, хотя сама алгебраическая формула их допускает. Контекст ограничивает применение формулы. Перед использованием модели вне привычного диапазона стоит проверить, сохраняется ли смысл величин и самого правила.

Две функции можно выполнить последовательно. Пусть первая переводит километры в стоимость, а вторая прибавляет сервисный сбор три рубля. Тогда общий результат равен `2x + 4`. Это композиция: выход первого правила становится входом второго. Перестановка правил меняет результат, если прибавить три к расстоянию до расчёта тарифа.

> Правило имеет вид `f(x) = 3x + 2`. При каком x результат равен 20?

> **Заметка**
>
> Одному входу у функции положен один выход. При этом разные входы могут дать один и тот же выход: у квадрата числа 2 и –2 оба превращаются в 4.

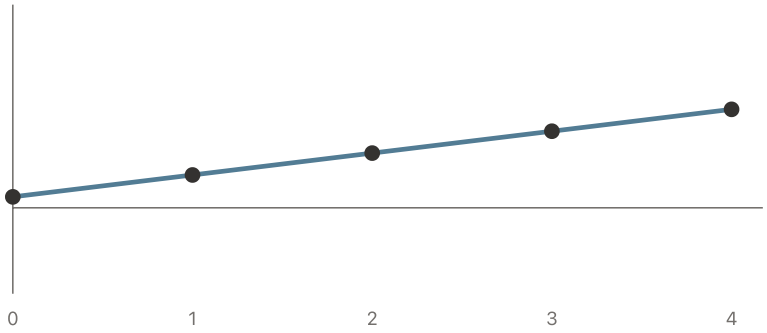
### 4. Прочитать график и наклон

На графике по горизонтали откладываем вход, по вертикали выход. Для $f(x) = 2x + 1$ точка (3; 7) означает: вход три даёт выход семь. Чтобы построить прямую, достаточно вычислить две её точки; остальные лежат на линии между ними и её продолжениях.

В общем правиле $y = ax + b$ число $a$ задаёт **наклон**, а $b$ значение при нулевом входе. При увеличении $x$ на единицу выход меняется на $a$. Если наклон положителен, прямая поднимается; если отрицателен, опускается. Нулевой наклон означает постоянный результат.

В опыте сохранено $b = 1$, а ползунок меняет наклон. Предскажите значения для входов 0, 1, 2, 3, 4 при наклоне минус один. После изменения получится 1, 0, −1, −2, −3. При любом наклоне все линии проходят через точку (0; 1), потому что произведение наклона на нулевой вход равно нулю.

## Проверьте свой прогноз




y = 2x + 1. Для x = 0, 1, 2, 3, 4 получаем: 1; 3; 5; 7; 9.

Прибавка x на 1 меняет y на 2.

Меняйте наклон прямой. Числа под графиком дают результаты для пяти последовательных входов.

*Интерактивный эксперимент — в электронной версии урока.*

Наклон не равен высоте точки. Две параллельные прямые могут находиться на разных высотах, но одинаково реагировать на изменение входа. Этот смысл позже понадобится в производной: нас будет интересовать, насколько меняется результат при небольшом изменении аргумента.

**Ссылки**

OpenStax: функции и их графики — дополнительные примеры входа, выхода и области определения.

*Профи.* **Восстановить правило по двум точкам**

До сих пор правило было дано, а точки вычислялись. На практике чаще наоборот: есть таблица, а правило нужно восстановить. Если точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ лежат на прямой

$y = ax + b$, то

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad b = y_1 - ax_1.$$

Первая формула — определение наклона «изменение выхода на единицу входа», записанное для двух конкретных точек. Вторая получается подстановкой первой точки в $y_1 = ax_1 + b$. Для точек (2; 7) и (5; 16) получаем $a = 9/3 = 3$ и $b = 7 - 6 = 1$. Проверка по второй точке: $3 \cdot 5 + 1 = 16$.

Типичная ошибка — взять разности в разном порядке: $(y_2 - y_1)/(x_1 - x_2)$ переворачивает знак наклона. Её ловит подстановка второй точки: с $a = -3$ и $b = 13$ вместо 16 получится $-2$. Вторая ошибка тоньше: через любые две точки проходит прямая, поэтому две точки не доказывают, что зависимость линейна. Если в таблице есть третья точка (8; 24), подставьте её: $3 \cdot 8 + 1 = 25 \neq 24$. Либо правило не прямая, либо в данных шум — с этой мысли начнётся подбор моделей.

### Найти наклон и сдвиг

Цель: По двум точкам вычислите a и b так, чтобы прямая прошла через обе.

```
x1, y1 = 2, 7
x2, y2 = 5, 16
a = 0  # TODO: наклон через разности координат
b = 0  # TODO: сдвиг через первую точку
for x, y in [(x1, y1), (x2, y2)]:
    print(f"x = {x}: прямая даёт {a*x + b}, в таблице {y}")
```

## 5. Степень и обратная операция

Выражение $2^3$ означает три множителя по два и даёт восемь. Число два называют основанием, три показателем степени. У положительного основания нулевая степень равна единице; отрицательный показатель означает обратное число: $2^{-2} = 1/4$.

**Логарифм** отвечает на обратный вопрос: в какую степень нужно возвести основание, чтобы получить заданное положительное число? Поэтому $\log_2 8 = 3$ и $\log_2 1 = 0$. Для вещественного логарифма аргумент положителен, основание положительно и не равно единице. При основании больше единицы числа между нулём и единицей имеют отрицательный логарифм.

В машинном обучении часто используется натуральный логарифм с основанием $e$, который обозначают ln. Сейчас достаточно понимать обратимость операции и её область определения. В Python `math.log(x)` вычисляет натураль-

ный логарифм, а `math.log2(x)` логарифм по основанию два. `x ** 2` означает квадрат; знак `^` в Python для степени не подходит.

В упражнении запишите функцию по формуле. Сначала проверьте её на нуле, затем на положительном и отрицательном входе. Отрицательный пример здесь нужен для проверки алгебры; применять такой вход как расстояние мы не собираемся.

## Перевести правило в код

Цель: Верните значение функции 2x + 1.

```
def f(x):
    return x  # TODO: запишите правило 2x + 1

print(f"При x = 3 результат равен {f(3)}")
```

### *Где это встретится дальше*

Формула связывает величины. Назовите входы и единицы, выполните действия по порядку и проверьте результат на простом случае.

Вычислить долю и отличить проценты от процентных пунктов.

Прочитать сумму и правило функции.

Связать наклон прямой с изменением выхода.

**История**

Логарифмы использовали для упрощения длинных вычислений до электронных калькуляторов. Их свойство превращать произведение в сумму объясняет эту роль. OpenStax: логарифмические функции.

**Подумай**

Попробуйте вход ноль: в прямой останется только свободный член. Затем вход один: результат равен сумме наклона и свободного члена. Эти два значения помогают проверить запись правила.

### Домашняя работа

1. Из 50 ответов 8 ошибочны. Найдите процент верных.
2. Для f(x) = −2x + 5 найдите f(3) и вход с выходом 1.
3. ★ Подберите два разных входа с одинаковым значением функции $x^2$.

### Источники


- OpenStax: функции (https://openstax.org/books/precalculus-2e/pages/1-introduction-to-functions).
- OpenStax: логарифмы (https://openstax.org/books/precalculus-2e/pages/4-3-logarithmic-functions).
- Python: math (https://docs.python.org/3/library/math.html).


Повторить эту тему